Bernardo Aceituno C.

12-10764

Problema de la Semana – Semana 7

Considere los sistemas

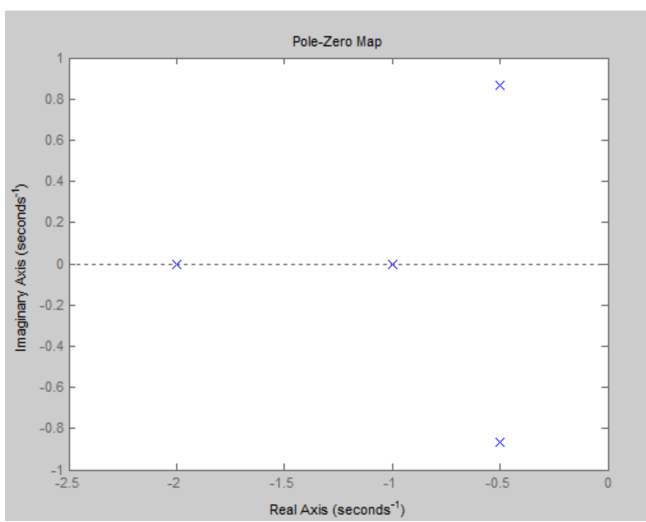
1. $G1(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s^2+s+1)}$
2. $G2(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)(s^2+s+1)}$
3. $G3(s) = \frac{(s-1)}{(s+1)(s+2)(s^2+s+1)}$

Ubique en un plano complejo (llamado plano s) los polos y ceros finitos de los 3 sistemas (x = polo y O = cero) y luego, para cada caso, calcule y grafique la respuesta temporal de los sistemas a una entrada escalón

1. Podemos notar que el numerador es constante, de allí el sistema no tienen *ceros finitos,* veamos el denominador, vemos que se anula para los siguientes valores:

$$S1 = -1, \qquad S2 = -2, \qquad S3 = -0.5 + j\frac{\sqrt{3}}{2}\ y \qquad S4 = -0.5 - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Gráficamente:



Ahora, para hallar la respuesta al escalón Lo primero que se hace es decomponer la función de transferencia dividida por s en fracciones simples:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)(s^2+s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2} + \frac{Ds+E}{s^2+s+1}$$

De allí nos queda:

$$\begin{cases} A = 1/2 \\ B = -1 \\ C = \ 1/6 \\ D = 1/3 \\ E = \ -1/3 \end{cases}$$

Luego la salida será:

$$Y(s) = \frac{1}{6}[\frac{3}{s} - \frac{6}{s+1} - \frac{1}{s+2} + \frac{2s-2}{(s+0.5)^2+0.75}]$$

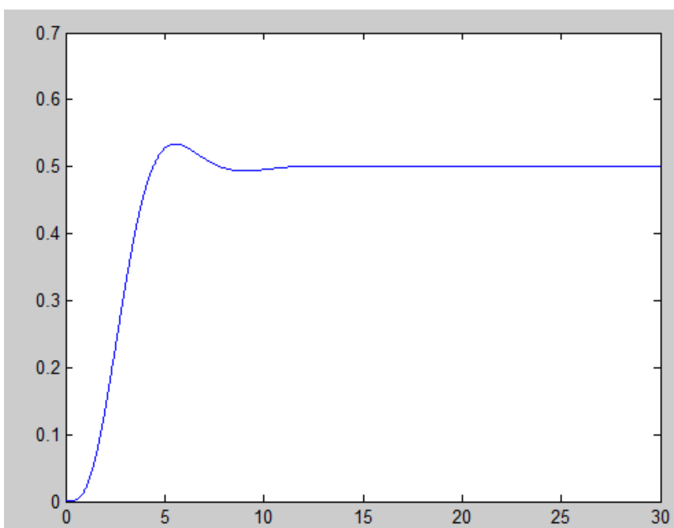
Si simplificamos:

$$Y(s) = \frac{1}{6}[\frac{3}{s} - \frac{6}{s+1} - \frac{1}{s+2} + \frac{2(s+0.5)}{(s+0.5)^2+0.75} - 2\sqrt{3}\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+0.5)^2+0.75}]$$

Aplicando transformada inversa de Laplace:

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2}esc(t) - e^{-t}esc(t) + [2\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - 2\sqrt{3}\cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t)]\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{3}}}$$

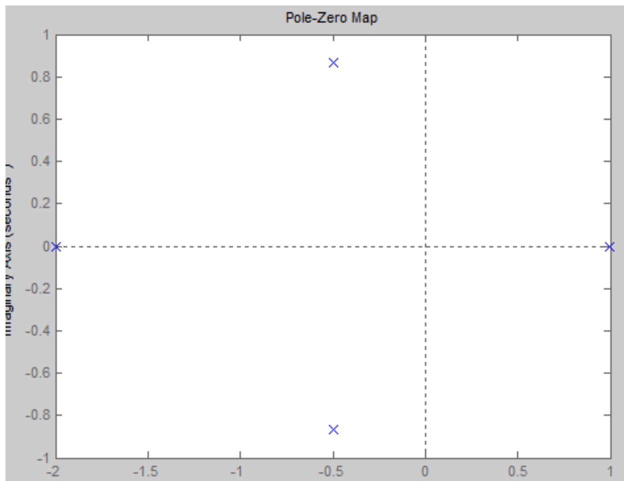
Gráficamente la respuesta al escalón es:



2. Vemos de nuevo que el numerador es constante, de allí el sistema no tiene ceros finitos, por otro lado vemos que el denominador se anula para:

$$S1 = 1, \qquad S2 = -2, \qquad S3 = -0.5 + j\frac{\sqrt{3}}{2} \; y \qquad S4 = -0.5 - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vemos que hay polo con parte real positiva, de allí vemos que el sistema es inestable, gráficamente en el plano complejo:



Veamos su respuesta al escalón, similar al caso anterior:

$$Y(s) = \frac{1}{s(s-1)(s+2)(s^2+s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{s+2} + \frac{Ds+E}{s^2+s+1}$$

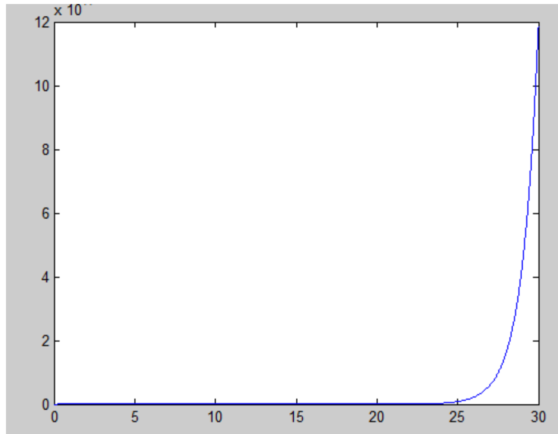
Si resolvemos nos queda:

$$Y(s) = \frac{-1}{2s} + \frac{1}{9(s-1)} + \frac{1}{18(s+2)} + \frac{s+1}{3(s^2+s+1)}$$

De allí aplicando transformada inversa nos queda:

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{2}esc(t) + \frac{1}{9}e^{t}esc(t) + \frac{e^{-2t}}{18} + \left[\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]\frac{e^{-\frac{t}{2}}}{3\sqrt{3}}}$$

Gráficamente:



(notese que diverge)

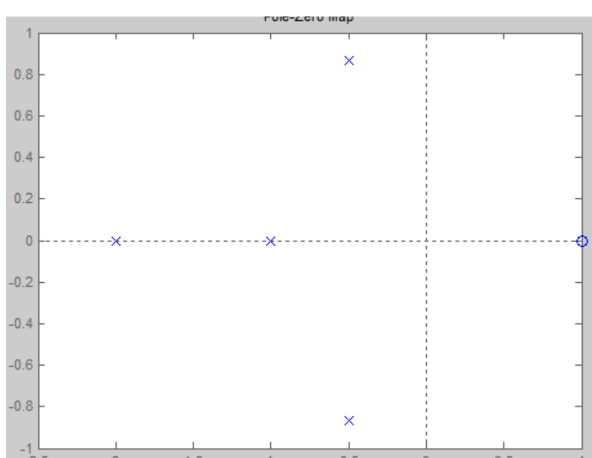
3. Vemos que el numador se anula en s = 1, luego tenemos un cero en:

$$Z1 = 1$$

De alli, vemos que el denominador se anula en:

$$S1 = -1, \qquad S2 = -2, \qquad S3 = \ -0.5 + j\frac{\sqrt{3}}{2}\ y \qquad S4 = -0.5 - j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Graficamente en el plano s:



Veamos la respuesta al escalon, para ello tenemos:

$$Y(s) = \frac{s-1}{s(s+1)(s+2)(s^2+s+1)} = \frac{-1}{2s} + \frac{2}{(s+1)} - \frac{1}{2(s+2)} - \frac{s}{s^2+s+1}$$

si aplicamos transformada inversa de Laplace:

$$\boxed{y(t) = -\frac{1}{2}esc(t) + 2e^{-t}esc(t) - \frac{e^{-2t}esc(t)}{2} - \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{3}}[\sqrt{3}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)]}$$

Y graficamente será: